202 – Exemples de parties denses et applications

Les parties denses d'un espace sont utiles car il arrive qu'une propriété de cette partie puisse être étendue à l'espace entier. On commencera par voir quelques outils permettant de montrer qu'une partie est dense, qui nous serviront sans toute la suite. On focalisera alors sur la densité dans R, et plus particulièrement sur l'équirépartition. De R, on passera à des espaces complets plus généraux, avant de s'intéresser à l'approximation et la régularisation.

I) <u>Définitions et outils de base</u>

(X,d) un espace métrique, A une partie de X

Déf : on définit l'adhérence de A comme le plus petit fermé contenant A, et A est dense dans X si son adhérence vaut X [Gou 10]

Rq : ainsi, A est dense dans X ssi pour tout ouvert U de X, l'intersection de U avec A est non vide *(car on prend x dans U, x est dans adh(A) et U est un vois de x donc U intersecte A)*

Prop : x est dans l'adhérence de A ssi il existe une suite de A qui converge vers x.

Attention : dans un espace topologique, l'adhérence topologique et l'adhérence séquentielle ne coïncident pas toujours. Si x est limite d'une suite, alors x est dans l'adhérence topologique, mais pas l'inverse. Donc l'adhérence séquentielle est incluse dans l'adhérence topologique.

Csq : A est dense dans E ssi pour tout x de E il existe une suite de A qui converge vers x.

Du coup, cette équivalence n'est pas vraie dans le cas général. On a toujours le sens <=. L'autre sens est vrai dans le cas des espaces métriques (ou des espaces topologiques « parfait », càd fermés et sans point isolé)

Prop : f :X->Y continue. A dense dans X. Alors f(A) dense dans f(Y) *(le faire avec des suites)*

II) <u>Densité et nombres réels</u>

1) <u>Premiers résultats</u> [Pom]

Ex : Q est dense dans R *(développement décimal)*

Csq : R\Q est dense dans R *(car sqrt(2)+Q est dense dans R et est inclus dans R\Q)*

Th : f un morphisme de groupe additif de R dans R, continu. Alors f est de la forme x->ax [Pom 22] *(csq de la densité de Q. On pose a=f(1), on montre que f(n)=nf(1), puis pour f(1/q), f(p/q), f(r) par densité et continuité)*

Cor : que les morphismes continus de (R,+) dans (]0,+oo[,*) sont des exponentielles [Pom 22] *(composer avec l'exp ou le log)*

Appl : le seul morphisme de corps de R est l'identité [Pom 23] *(c'est en particulier en mph de groupe donc f(p/q)=p/q*f(1)=p/q (on utilise pas de continuité !). f=Id sur Q. On montre que f est croissant, en mq f(z)>0 si z>0. On suppose par l'abs qu'il existe x tq f(x) différent de x, on arrive à une absurdité)*

Th : les sous groupes additifs de R sont denses ou discret [Pom 23] *(on peut utiliser la division euclidienne)*

Appl : si t est irrationnel, {exp(2i*Pi*t*n, n} est dense dans S^1 (réciproque vraie). De même, {sin(nt),n} et {cos(nt),n)} sont denses dans [-1,1] [Pom 23] *(il suffit de mq que Z+tZ est dense dans R, en utilisant les sg de Z, par l'absurde, puis en passant à l'exp on conclut)*

2) <u>Equirépartition</u> [Ch-L1 131]

Déf : une suite est équirépartie si N(a,b,n)/n tend vers b-a pour tous a,b

Prop : une suite équirépartie est dense *(N(a,b,n) le nb de termes parmi les n premiers qui sont dans [a,b]. Si on se donne un segment [a,b], N(a,b,n) est équivalent à (b-a)n donc apcr différent de 0 donc un x_n est dans [a,b])*

Prop : on note Sn(f) la moyenne des n premiers f(x_k). (xn) est équirepartie ssi pour toute f Riemann intégrable et 1 périodique Sn(f)->int(f) ssi pour toute f continue Sn(f)->int(f) *(On commence par f Riemann int. Si c'est vrai alors on prend f=indicatrice sur [a,b] et ça mq la suite est équirépartie. Autre sens : on encadre f avec deux fonctions en escaliers à l'intégrale très proche, on montre le résultat pour une fonction indicatrice qu'on étend aux fonctions en escalier par linéarité et c'est bon. Si f est continue : on essaye d'approcher une fonction en escalier par une fonction continue. Pour l'autre sens, on appelle F l'ensemble des fct continues qui vérifient Sn(f)->f, F contient tous les poly trigo donc l'adhérence de F c'est toutes les fct continues, reste à mq F est fermé)*

Prop : critère de Weil ; xn est équirep ssi pour tout m entier, les isobarycentres des n premiers exp(2i*Pi*m*x_k) tendent vers 0 *(sens direct : prop précédente. Autre sens : on mq pour toute fct continue, Sn(f) tend vers f, en approchant f avec un poly trigo)*

Appl : si t est irrationnel, (nt) est équirépartie modulo 1 *(critère de Weil, somme géométrique)*

III) <u>Densité et espaces complets</u>

1) <u>Prolongement de fonction et complétion d'un espace</u>

Th : prolongement de fonctions (deux volets) [Gou 23]

Th : complétion d'un espace métrique. Préciser que E est dense dans son complété [Gou 25] **(attention : utilise le fait que R est complet, + prolongement !!! Autre façon dans le Pommelet)** *(Même procédé que pour construire R, à peu de choses près. Le fait que tous les espaces complets dans lesquels on peut plonger l'espace métrique soient isométriques entre eux vient du th précédent)*

Ex : L^p(R^n) est le complété de (Cc(R^n),|.|p) [Rud 84] *(pour p=1 et n=1, sert notamment pour prolonger l'intégrale de Riemann)*

2) <u>Th de Baire et applications</u> [Gou 397]

Déf : espace de Baire : toute intersection dnb d'ouverts denses est dense [Gou 397] *(être de Baire est une ppté topologique)*

Th : th de Baire : complet => Baire [Gou 397] *(on se donne une suite d'ouverts denses on et un vois , il faut mq l'intersection de V avec l'intersection des On est non vide. On construit une première boule B_0 inclus dans Oo et V, puis on construit des boules Bn incluses les unes dans les autres de plus en plus petites qui sont incluses dans Bn-1 et On. Bn est une suite de fermés décroissants. Comme E est complet, leur intersection est non vide ; en effet, le diamètre des boules tend vers 0, et si on prend x_n dans B_n, la suite est de Cauchy donc converge, et appartient à l'intersection. C'est fini.)*

Ex : Q n'est pas de Baire donc non complet *(considérer les ouverts Q\{q})*

Ex :]-1,1[est de Baire car homéomorphe à R complet, mais pas complet.

Appl : une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense [Gou 399] *(pas facile)*

Construction : fonction dérivable à dérivée discontinue sur un ensemble dense [Gou] *(rien à voir avec Baire)*

Appl : les fonctions continues nulle part dérivables sont denses [Gou 401] *(difficile)*

3) <u>Espaces de Hilbert</u>

Déf : espace de Hilbert [BMP]

Def base hilbertienne [BMP 107]

Ex : base de l^2

Th : existence de base hilbertienne. La base est dénombrable ssi H est séparable. Dans le cas général on utilise Zorn. [BMP 108]

Th : équivalences base hilb [BMP 109]

Prop : une isométrie conserve les bases hilb [???]

Deux exemples :

- base hilb de Bergman [BayMarg]
- base hilb de L^2 (polyn orthogonaux) [BMP]

IV) Exemples de parties denses

1) Dans l'ensemble des matrices [BMP 179] [Pom 36]

Prop : GLn(K) est dense dans Mn(K) *(facile)*

Csq : AB et BA ont même polynôme caractéristique *(on le montre pour les matrices inversibles, facile aussi)*

Prop : Cn matrices diagonalisables à vp distinctes, Dn diagonalisables, Tn trigonalisables. Alors Cn est dense dans Tn pour K=R ou C.

Csq : th de Cayley Hamilton sur C

2) Dans l'ensemble des fonctions continues

Th : théorème de Weierstrass [Gou 224] *Ainsi on peut montrer des résultats sur les fonctions continues en montrant ces résultats sur les polynômes*

Appl : th des moments [Pom 178]

Ex : th de Brouwer *(on montre un résultat pour les fonctions C^1 puis on conclut pour les fonctions continues)*

Th : Weierstrass trigo

Th : théorème de Stone Weierstrass [Analyse L3] *(qui unifie les théorèmes ci-dessus)*

3) Dans les espaces L^p

a) Théorèmes

Th : les fcts Cc sont denses dans L^p

Th : les L^p sont séparables [Br] *(se sert du fait que Cc dense dans L^p)*

Déf : approximation de l'identité [BMP 119]

Exemple d'approximation de l'identité : [Br 70]

Th : convergence (régularisation) [BMP 119] *(on utilise la densité des fcts Cc dans L)*

Th : troncature [ZQ 324]

Bilan : densité des fonctions Cc lisses dans L^p

b) <u>Applications</u>

Appl 1 : densité des polynômes trigos dans les fonctions continues 2Pi-period [RW L2 710] *(en convolant f avec une approximation de l'identité poly trigo)*

Csq : (e_n) est une base hilbertienne de L^2 *(utilise la densité des fonctions continues dans L^2)*

Csq : si f est dans L^2, la série de Fourier de f converge vers f pour la norme quadratique [RW L2 712]

Appl 2 : th de Plancherel [Far]

<u>Développements</u>
1 - Th de Müntz [Gou Alg] + [Gou An] (***)
2 - SW [Analyse L3 141] (***)
3 - Polynômes orthogonaux (base hilbertienne + appl à L^2) [Dem] + [BMP] (* ou **)
Espace de Bergman [Bayen & Margaria – Espaces de Hilbert et opérateurs] (* ou **)
Sous espaces fermés de L^p [Rud Analyse fct 111] (* ou **)
Théorème de Plancherel [Far 136] (* ou **)
Fejér [Gou An 286] (* ou **)

<u>Bibliographie :</u>
[Gou]
[P]
[BMP]
[Br]
[ZQ]
[Rud]
[Dem] Demailly
[Analyse L3]
[Far}